Theoretische Physik II
für Lehramtsstudenten
WS 2005/06

Vorlesungen: Michael Flohr
Übungen: Sebastian Uhlmann
Übungsleitung: Kirsten Vogeler

---

4. Übung

(Abgabe: 15.11.2005)

11. *Translationsoperatoren*:

   (a) Folgern Sie aus Aufgabe 10.(b) und der Vertauschungsrelation $[X, P] = \mathrm{i}\hbar\mathbb{1}$ zwischen Ort und Impuls, daß

   $$\text{für} \quad T_{x_0} := \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}x_0 P} \quad \text{gilt} \quad [T_{x_0}, X] = -x_0 T_{x_0}\,. \qquad \text{(1 P.)}$$

   (b) Zeigen Sie durch Anwendung des Ortsoperators auf den Zustand $T_{x_0}|\Lambda_x\rangle$, daß T_{x_0} den Eigenzustand $|\Lambda_x\rangle$ von X zum Eigenwert x in einen Eigenzustand $|\Lambda_{x+x_0}\rangle$ zum Eigenwert $x + x_0$ überführt. Machen Sie sich klar, daß in der Ortsdarstellung T_{x_0} auf Funktionen $\psi(x)$ über eine Taylorentwicklung wirkt, d. h.

   $$T_{x_0}\colon \psi(x) \mapsto \psi(x - x_0)\,,$$

   in Übereinstimmung mit $\langle\Lambda_x|T_{x_0}|\psi\rangle = \langle\Lambda_x|T^{\dagger}_{-x_0}|\psi\rangle = \langle\Lambda_{x-x_0}|\psi\rangle$. Also bewirkt der Operator T_{x_0} Translationen des Orts. Insbesondere ist das Spektrum des Ortsoperators (also die Menge aller Eigenwerte) die Menge der reellen Zahlen. (1 P.)

   (c) Untersuchen Sie analog die Wirkung des Operators $T_{p_0} := \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}p_0 X}$ auf die Eigenzustände $|\Gamma_p\rangle$ des Impulsoperators. (2 P.)

12. *Kohärente Zustände*: Damit das Spektrum des Anzahloperators des harmonischen Oszillators nach unten beschränkt ist, muß es einen Eigenzustand $|K_\chi\rangle$ zum Vernichtungsoperator a geben mit $a|K_\chi\rangle = \chi|K_\chi\rangle$ (der Fall $\chi = 0$ ist der Grundzustand $|\Lambda_0\rangle$ des harmonischen Oszillators). In dieser Aufgabe untersuchen wir Eigenschaften dieser sogenannten „kohärenten Zustände“:

   Mit Hilfe der Translationsoperatoren für Ort und Impuls aus Aufgabe 11 bilden wir einen unitären Operator K,

   $$K := \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{i}}{\hbar}p_0 x_0}\, T_{p_0} T_{x_0} = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(p_0 X - x_0 P)} = \mathrm{e}^{\chi a^\dagger - \chi^* a} =: K(\chi)\,,$$

   der von dem komplexen Parameter

   $$\chi := \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}x_0 + \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\frac{\alpha}{\sqrt{2}}p_0 \quad \text{mit Betragsquadrat} \quad |\chi|^2 = \frac{1}{\hbar\omega}\Big(\frac{p_0^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2\Big)$$

   abhängt. Dabei bezeichnet $\alpha := \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ die „Oszillatorlänge“. Der Operator K erzeugt aus dem Grundzustand $|\Lambda_0\rangle$ die kohärenten Zustände

   $$|K_\chi\rangle := K(\chi)|\Lambda_0\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\chi|^2}\mathrm{e}^{\chi a^\dagger}|\Lambda_0\rangle \qquad \text{mit} \qquad \chi \in \mathbb{C}\,.$$

(a) Beweisen Sie die Gleichheit der in der Definition von K bzw. $|K_\chi\rangle$ verwendeten Ausdrücke. Benutzen Sie dabei

$$X = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger)\,, \qquad P = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\frac{\hbar}{\mathrm{i}}(a - a^\dagger)\,, \qquad [a, a^\dagger] = 1\,, \qquad a|\Lambda_0\rangle = 0$$

sowie die Regel $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A \mathrm{e}^B \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}[A,B]}$, falls $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$ ist (aus Aufgabe 10.(d)). Wie lautet die zum Zustand $|K_\chi\rangle$ gehörige Wellenfunktion $\langle\Lambda_x|K_\chi\rangle$ in der Ortsdarstellung? (4 P.)

(b) Zeigen Sie, daß $|K_\chi\rangle$ normierter Eigenzustand zu a mit Eigenwert χ ist. Benutzen Sie dazu die Operatorrelation $[f(A), B] = f'(A)[A, B]$ aus Aufgabe 10.(a) (oder die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel aus 10.(b)). Beachten Sie, daß K unitär ist. (2 P.)

(c) Leiten Sie her, daß $|K_\chi\rangle$ nach den Eigenzuständen $|\Lambda_n\rangle$ des Anzahloperators entwickelt werden kann gemäß

$$|K_\chi\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\chi|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi^n}{\sqrt{n!}} |\Lambda_n\rangle\,. \qquad (2\text{ P.})$$

(d) Berechnen Sie die Erwartungswerte und Schwankungsquadrate von Energie, Ort und Impuls im Zustand $|K_\chi\rangle$. Wie hängen die Schwankungsquadrate von χ ab? Was fällt bei den Schwankungsprodukten auf? (8 P.)